## II - EXERCICES D'ECHANTILLONNAGE

**Exercice 1**

Une urne contient des jetons de trois sortes : 30% sont marqués 1, 50% sont marquës 2 et les 20% restant sont marquës 3. On tire au hasard avec remise deux jetons et on désigne par $X_1$, respectivement $X_2$, le nombre de points amenés par le premier resp. le second tirage. On calcule alors la moyenne et on note $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ la variable aléatoire ainsi définie appelée moyenne d'échantillonnage.

1) Construire le tableau donnant toutes les valeurs possibles du couple $(X_1, X_2)$, la probabilité de chaque couple et la valeur correspondante de la moyenne empirique.
2) Calculer $E(X)$, $E(\bar{X})$, $V(X)$ et $V(\bar{X})$.
3) Tracer le diagramme en bâtons des lois de $X$ et $\bar{X}$ en utilisant deux graphiques séparés mais les mêmes échelles sur les axes pour les deux graphiques.

**Exercice 2**

On considère une population dans laquelle on veut étudier un certain caractère quantitatif. On tire dans cette population deux échantillons au hasard, avec remise, de taille respectivement $n_1$ et $n_2$. On note $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ les moyennes empiriques du caractère calculées sur chacun des deux échantillons.

1) Calculer $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ et $V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$.
2) Vérifier que les variables $\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}$ et $\frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}$ ont même espérance mathématique et déterminer celle qui a la plus petite variance.

**Exercice 3**

Soit $X$ une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, avec $m = 2000$, $\sigma = 330$, et $\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ la moyenne empirique d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la variable $X$.

1) Rappeler les hypothèses satisfaites par les variables $X_1, \ldots, X_n$, puis calculer $E(\bar{X})$ et $V(\bar{X})$. Quelle est la loi de $\bar{X}$ si on suppose que $n = 9$ ?
2) Sachant que $n = 9$, déterminer le plus petit intervalle contenant $\bar{X}$ avec une probabilité 0,9. On note $r$ le rayon de cet intervalle.
3) Déterminer la taille minimale d'échantillon à considérer pour que le rayon de cet intervalle n'excède pas $r/2$.



CamScanner

## Exercice 4

On admet que la population française comporte 10% de gauchers. On tire au hasard n individus dans la population, on note $X_n$ le nombre de gauchers dans l'échantillon tiré et on pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1) Donner une interprétation pour $Y_n$. Préciser la loi de $X_n$ et en déduire les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n.
2) Dans le cas où n = 10, expliciter la loi de $Y_n$ (valeurs et proba.) et calculer $P(Y_n > 0,2)$.
3) En utilisant la loi de $X_n$ et les tables, calculer $P(Y_n > 0,2)$ pour n = 20, 40 puis 50.
4) En utilisant les résultats précédents que peut-on dire de la suite des variables $Y_n$ et de leur loi quand n augmente indéfiniment ?

## Exercice 5

On tire avec remise n boules dans une urne comportant 40% de boules blanches et 60% de boules noires, et on note F la proportion de boules blanches dans l'échantillon tiré.

1) Dans le cas où n = 20, calculer la probabilité que la proportion de boules blanches dans l'échantillon tiré excède 50%.
2) Même question dans le cas où n = 150.

## Exercice 6

Toujours dans la même urne (cf. exercice 5), on tire avec remise deux échantillons de taille n et on note $F_1$, respectivement $F_2$, la proportion de boules blanches dans le premier, resp. le second, échantillon tiré.

1) Dans le cas où n = 75, calculer la probabilité que les proportions observées dans les deux échantillons diffèrent de plus de 10%.
2) Déterminer le plus petit entier n de sorte que cette probabilité n'excède pas 10%.

## Exercice 7

Soient X une variable de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de X.

On considère les v.a. : $U = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sigma}$ $V = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - m)^2}{\sigma^2}$ et $W = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$

1) Calculer l'espérance mathématique et la variance des variables U et V.
2) Donner les lois des variables U, V et W, et préciser les valeurs de E(W) et V(W) .

## Exercice 8

Soient X une variable aléatoire de moyenne m et de variance $\sigma^2$ et $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de X. On note $S_n^2$ la variance empirique et $S'^2_n$ la variance empirique corrigée.

1) Pourquoi peut-on dire que les v.a. $S_n^2$ et $S'^2_n$ sont des statistiques d'échantillonnage ?
Calculer $E(S_n^2)$ et $E(S'^2_n)$. Donner les lois des variables $S_n^2$ et $S'^2_n$.



CamScanner

2) On note $S_n$ resp. $S'_n$ l'écart type empirique, resp. l'écart type empirique corrigé, quels résultats du cours permettent de dire que ces deux statistiques convergent vers $\sigma$ ?

**Exercice 9**

Soit T une variable aléatoire admettant pour densité de probabilité :

$$f(t) = \begin{cases} kt & \text{si } t \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère un n-échantillon $(T_1, T_2, \dots T_n)$ de la v.a. T, et on pose $M_n = \max(T_1, T_2, \dots T_n)$.

1) Déterminer k en fonction de a de sorte que f soit une densité de probabilité, puis calculer E(T) et V(T). Calculer la fonction de répartition F de T.
2) Déterminer la fonction de répartition de la variable $M_n$. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$. Déterminer la limite de $E(M_n)$ et $V(M_n)$ quand n tend vers l'infini.
3) En déduire que $M_n$ converge en moyenne quadratique vers a.

**Exercice 10** (optionnel)

Soient X une variable aléatoire dont la loi est définie par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \text{si } x \in [\theta, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \theta < 1.$$

et $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots X_n)$ où $(X_1, X_2, \dots X_n)$ est un n-échantillon de la variable X.

1) Donner l'ensemble des valeurs prises par $Z_n$ puis calculer $P(Z_n > z)$ pour $z \in [\theta, 1]$. Pourquoi est-il justifié de penser que $E(Z_n) \geq \theta$ ?
2) Calculer $E(Z_n)$ et montrer que $\lim_{n \to \infty} E(Z_n - \theta) = 0$.
3) En utilisant la question 1, montrer que $Z_n$ converge en loi vers une variable $Z^*$ dont on définira la loi.

**Exercice 11**

Dans la ville de B., une entreprise de ramassage d'ordures ménagères dispose de bennes d'une capacité de 5,5 tonnes de charge utile avec lesquelles elle effectue ses tournées. L'expérience montre que le long d'une tournée en centre ville le poids des ordures à enlever par conteneur standard peut être modélisé par une variable aléatoire X de moyenne 50 kg et d'écart type 30 kg.

1) Calculer le nombre maximum de conteneurs qu'une benne pourra relever au cours d'une tournée sans excéder sa capacité maximale avec une probabilité de 95%.
2) Même question si l'on admet que la benne peut accepter une surcharge de 500 kg.

**Exercice 12**

Un promoteur immobilier s'apprête à construire un ensemble d'appartements en centre ville. Une étude antérieure a montré qu'en centre ville 3 ménages sur 5 possèdent une automobile. Combien d'emplacements de parking doit-il prévoir dans



CamScanner

un lotissement de 425 logements s'il veut satisfaire la demande avec une probabilité de 90%.
Au préalable on précisera les éléments du modèle d'inférence adapté à la résolution de ce problème.

**Exercice 13** **(optionnel)**

Une étude réalisée dans un fast-food a mis en évidence les deux conclusions suivantes :
- 56% des clients dépensent plus de 8 € pour leur repas,
- le montant moyen des dépenses par client est de 7 € avec un écart type de 1,5 €.

1) Evaluer la probabilité pour que dans un échantillon de 150 clients tirés au hasard,
   i) le nombre de ceux qui dépensent plus de 8 € dépasse 92.
   ii) le montant moyen des sommes dépensées soit compris entre 5 et 7,5 €.

On explicitera les éléments du modèle d'inférence statistique sur lequel repose la résolution de ce problème et éventuellement les hypothèses nécessaires.

2) Quelle est la taille minimum de l'échantillon à prélever pour que la probabilité calculée à la question 1-ii) soit supérieure à 0,99 ?

**Exercice 14**

Bernard, directeur sportif d'une course cycliste ayant signé la charte anti-dopage, s'est engagé vis à vis des sponsors à présenter sur la ligne de départ, le jour J, au moins 50 coureurs non dopés. Or une récente enquête a montré que 60% des coureurs cyclistes sont dopés. Il se demande combien de candidats à la course il doit convoquer afin d'être en mesure de tenir ses engagements, avec une bonne probabilité.

1) Bernard pense qu'il faut convoquer 125 cyclistes. Montrez que dans ce cas il n'a qu'une chance sur deux de parvenir à aligner au moins 50 cyclistes non dopés sur la ligne de départ.
   *Indication :* on notera $Y_n$ le nombre de cyclistes non dopés parmi n convoqués, donner la loi de $Y_n$ puis montrer que $P(Y_{125} \geq 50) = 0{,}5$.

2) Bernard convient de son erreur et souhaite que vous l'aidiez à calculer le nombre minimal n de coureurs à convoquer de façon à être presque sûr , c. à d. avec une probabilitë de 95%, de pouvoir aligner au moins 50 coureurs non dopés sur la ligne de départ le jour J ; i.e. pour Bernard, déterminez le plus petit entier n tel que :
   $P(Y_n \geq 50) \geq 0{,}95$. (I)
   Justifier que nécessairement $n > 125$ ; donner alors une loi approchée pour $Y_n$, nombre de cyclistes non dopés parmi n convoqués et calculer n.
   *Indication :* la résolution de (I), amènera à résoudre une inéquation du second degré en $\sqrt{n}$ .



CamScanner

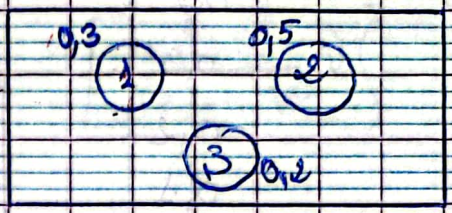
# Correction des exercices

## II Exercices D'Echantillonnage

### Exercice 1:

X : variable aléatoire nombre de pts amenés

↳ $(X_1, X_2)$, $n = 2$ : Taille de l'échantillon




| $X_1$ | $X_2$ | Probabilité du couple | $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,09 | 1 |
| 1 | 2 | 0,15 | 1,5 |
| 1 | 3 | 0,06 | 2 |
| 2 | 1 | 0,15 | 1,5 |
| 2 | 2 | 0,25 | 2 |
| 2 | 3 | 0,1 | 2,5 |
| 3 | 1 | 0,06 | 2 |
| 3 | 2 | 0,1 | 2,5 |
| 3 | 3 | 0,04 | 3 |

- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,5 + 3 \times 0,2 = 1,9$

- La Loi de $\bar{X}$

| Valeurs de $\bar{X}$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | Ta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilités | 0,09 | 0,3 | 0,37 | 0,2 | 0,04 | = |

- $E(\bar{X}) = \sum \bar{x}_i p_i = 1 \times 0,09 + 1,5 \times 0,3 + 2 \times 0,37 + 2,5 \times 0,2 + 3 \times 0,04 = 1,9$

- $V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - [E(X)]^2$

$= \left[(1 \times 0,3) + (4 \times 0,5) + (9 \times 0,2)\right] - (1,9)^2 = 0,49$

- $V(\bar{X}) = \left[1 \times 0,09 + \left[(1,5)^2 \times 0,3\right] + 4 \times 0,37 + (2,5)^2 \times 0,2 + 9 \times 0,04\right)\right] - (1,9)^2 = 0,245$

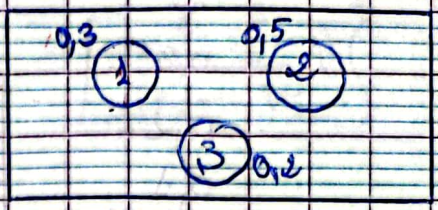
# Correction des exercices

## II. Exercices D'Echantillonnage

### Exercice 1:

X: variable aléatoire nombre de pts amenés

↳ $(X_1, X_2)$, $n = 2$ : Taille de l'échantillon




| $X_1$ | $X_2$ | Probabilité du couple | $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,09 | 1 |
| 1 | 2 | 0,15 | 1,5 |
| 1 | 3 | 0,06 | 2 |
| 2 | 1 | 0,15 | 1,5 |
| 2 | 2 | 0,25 | 2 |
| 2 | 3 | 0,1 | 2,5 |
| 3 | 1 | 0,06 | 2 |
| 3 | 2 | 0,1 | 2,5 |
| 3 | 3 | 0,04 | 3 |

- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,5 + 3 \times 0,2 = 1,9$

- La Loi de $\bar{X}$

| Valeurs de $\bar{X}$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilités | 0,09 | 0,3 | 0,37 | 0,2 | 0,04 | 1 |

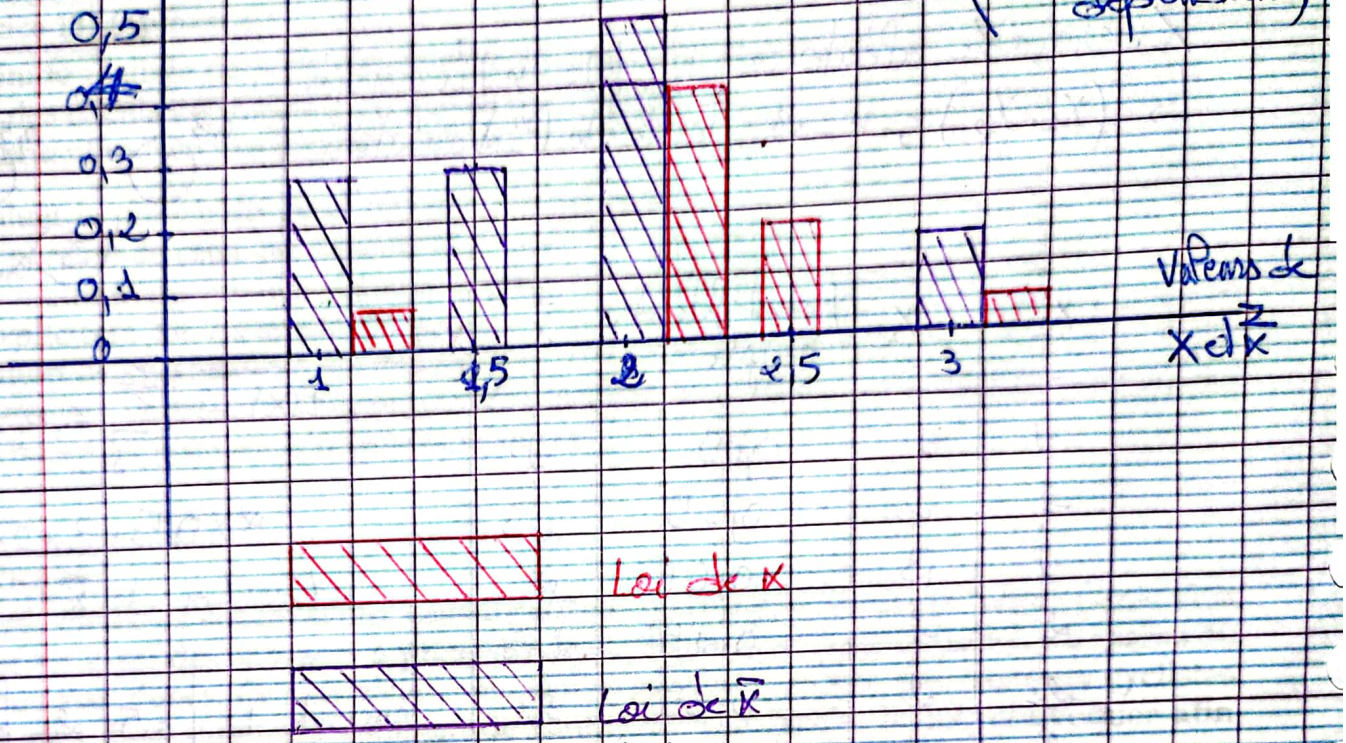
- $E(\bar{X}) = \sum \bar{x}_i p_i = 1 \times 0,09 + 1,5 \times 0,3 + 2 \times 0,37 + 2,5 \times 0,2 + 3 \times 0,04 = 1,9$

- $V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - [E(X)]^2$

$= [(1 \times 0,3) + (4 \times 0,5) + (9 \times 0,2)] - (1,9)^2 = 0,49$

- $V(\bar{X}) = [1 \times 0,09 + [(1,5)^2 \times 0,3] + 4 \times 0,37 + (2,5)^2 \times 0,2 + 9 \times 0,04)] - (1,9)^2 = 0,245$

• Le Diagramme des Bois : $X$ et $\bar{X}$ (avec remise indépendant) (sans remise dépendant)




**Exercice 2 :** $E(X) = m$ ; $V(X) = \sigma^2$

1 → $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = m - m = 0$

$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2) = \frac{V}{n_1} + \frac{V}{n_2} = V\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}\right)$

2 → $E\left(\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(\bar{X}_1) + E(\bar{X}_2)\right) = \frac{1}{2}[m + m] = m$

* $E\left(\frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}\right) = \frac{n_1}{n_1+n_2} E(\bar{X}_1) + \frac{n_2}{n_1+n_2} E(\bar{X}_2)$

$= \frac{m(n_1+n_2)}{n_1+n_2} = m$

* $V\left(\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(V(X_1) + V(X_2)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{n_1} + \frac{\sigma}{n_2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{(n_2+n_1)}{n_1 \cdot n_2}\right)\sigma \left(= \frac{1}{4}\sigma\right)$

$$V\left(\frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2}\right) = V\left(\frac{n_1\bar{X}_1}{n_1+n_2}\right) + V\left(\frac{n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2}\right)$$

$$= \left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^2 \left(\frac{V}{n_1}\right) + \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)^2 \left(\frac{V}{n_2}\right) = \left[\frac{n_1^2+n_2^2}{(n_1+n_2)^2}V\right]$$

$$= \frac{V}{n_1+n_2}$$

$$\frac{(n_1+n_2)^2 V}{4n_1n_2} \quad \frac{V}{n_1+n_2}$$

$$(n_1+n_2)^2 \geq 4n_1n_2$$

car $n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2 \geq 4n_1n_2$

car $n_1^2 + n_2^2 - 2n_1n_2 \geq 0$

$(n_1-n_2)^2 \geq 0$

Alors $\frac{(n_1+n_2)^2}{4n_1n_2} \geq \frac{V}{n_1+n_2}$

$$V\left(\frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2}\right) \leq V\left(\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2}{2}\right)$$

## Exercice 3 :

1- $X_1, \ldots, X_n$ sont IID (indépendantes et distribuées identiquement)

- $E(\bar{X}) = E(X)$
- $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$

$\bar{X}$ est normalement distribuée (combinaison linéaire de v.a. normale indépendante)

$$\bar{X} \rightsquigarrow N\left(m, \sqrt{\frac{V(X)}{n}}\right) = N\left(2000, \sqrt{\frac{300^2}{9}}\right)$$

$$= N(2000, 110)$$

2- La densité étant maximum en $m$, donc l'intervalle cherché est centré sur $m$. Donc il sera la forme $I = [m-r, m+r]$

On cherche à calculer $r$ tel que $P(\bar{X} \in I) = 0,9$

$\bar{X} \in [m-r, m+r]$

$\Leftrightarrow P(m-r < \bar{X} < m+r) = 0,9$

$P(m-r \leq \bar{X} \leq m+r) = 0,9$

$P(|\bar{X}-m| \leq r) = 0,9$

$\bar{X} \rightsquigarrow N(2000, 110)$ $\Rightarrow T = \dfrac{\bar{X}-m}{\sigma} = \dfrac{\bar{X}-2000}{110}$

$P(|\bar{X}-m| \leq r) = P\left(|T| \leq \dfrac{r}{110}\right) = 0,9$ $\quad T \rightsquigarrow N(0,1)$

$\Rightarrow 2F_0\left(\dfrac{r}{110}\right) - 1 = 0,9 \Rightarrow F_0\left(\dfrac{r}{110}\right) = 0,95$

$\dfrac{r}{110} = F_0^{-1}(0,95) \Rightarrow r = 110 \times 1,6449$

$\boxed{r = 181}$

3- on cherche à déterminer $n$ ($\in \mathbb{N}^*$) minimale tel que

$P(|\bar{X}-m| \leq \dfrac{181}{2}) = 0,9$ où $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\bar{X} \rightsquigarrow N\left(2000, \dfrac{330}{\sqrt{n}}\right)$

Si on pose $T = \dfrac{\bar{X}-2000}{\frac{330}{\sqrt{n}}}$ suit la loi $N(0,1)$

$P\left(|T| \leq \dfrac{181\sqrt{n}}{2\times 330}\right) = 0,9 \Rightarrow 2F_0\left(\dfrac{181\sqrt{n}}{2\times 330}\right) - 1 = 0,9$

$\Rightarrow F_0\left(\dfrac{181\sqrt{n}}{2\times 330}\right) = 0,95$

$\Rightarrow \dfrac{181\sqrt{n}}{2\times 330} = F_0^{-1}(0,95)$

$\Rightarrow n = \left(\dfrac{660 \times 1,6449}{181}\right)^2 \Rightarrow n = 36$

Rq : Pour avoir un intervalle de même probabilité et de rayon deux fois plus petit, il faut prendre un échantillon 4 fois plus grand

## Exercice 4 :

Population française ⟶ 10% de gauchers

1- On tire au hasard $n$ individus
$X_n$ : le nombre de gauchers dans l'échantillon

Rép : $Y_n = \frac{X_n}{n}$ : Proposition des gauchers dans l'échantillon

$X_n \rightsquigarrow B(n; 0,1)$ en effet si à chaque individu de l'échantillon on associe une variable indicatrice de l'événement "gaucher" c-à-d au $i^{ème}$ individu on associe la variable $Z_i$, telque $Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu est gaucher} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

on définie ainsi n V.a. de Bernoulli de même paramètre $p$ et $X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, si on ajoute l'hypothèse que les $Z_i$ sont indépendantes alors $X_n \rightsquigarrow B(n; 0,1)$

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{n \cdot 0,1}{n} = 0,1$$

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{n \cdot 0,1 \cdot 0,9}{n^2} = \frac{0,09}{n}$$

2- $Y_{10} = \frac{X_{10}}{10}$ ; pour $n = 10$ ; $E(Y_{10}) = 0,1$ et $V(Y_{10}) = 0,009$

| valeurs | |
|---|---|
| Probabilités | |

2- $n=10$ $Y_{10} = \frac{X_{10}}{10} = \frac{k}{10}$ ; $k \in \{0, \dots, 10\}$

$$P\left(Y_{10} = \frac{k}{10}\right) = P\left(\frac{X_{10}}{10} = \frac{k}{10}\right) = P(X_{10} = k)$$
$$= C_{10}^{k} (0,1)^{k} (0,9)^{10-k}$$

| valeurs | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,3487 | 0,3874 | 0,1937 | 0,0574 | 0,0112 | 0,0015 | 0,0001 |

pour $n=10$

$0,7361 - 0,$

$0,92 - 0,71$

$$P(Y_n > 0,2) = 1 - P(Y_n \leq 0,2) = 1 - (0,3487 + 0,3874 + 0,1937)$$
$$= 0,0702$$

3- Pour $n = 20, 40, 50$, on calcule $P(Y_n > 0,2)$

$$P(Y_n > 0,2) = P\left(\frac{X_n}{n} > 0,2\right) = P(X_n > 0,2n)$$

et $X_n \rightsquigarrow B(n; 0,1)$

| n | $n \times 0,2$ | $P(Y_n > 0,2) = P(X_n > 0,2n) = 1 - F(0,2n)$ |
|---|---|---|
| 20 | 4 | $1 - F(4) = 1 - 0,9568 = 0,0432$ |
| 40 | 8 | $1 - F(8) = 1 - 0,9845 = 0,0155$ |
| 50 | 10 | $1 - F(10) = 1 - 0,9906 = 0,0094$ |

4- On remarque que la probabilité diminue quand n augmente indéfiniment et c'est normale parce que la loi de $Y_n$ est centrée en 0,1 et sa variance diminue quand n augmente.

## EXERCICE 5:

une urne → 40% Boule blanches
→ 60% Boule noires

F: la proportion de boules blanches

loi binomiale

$F = \frac{X_n}{n}$

1- pour $n = 20$ ; $\begin{cases} E(F) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{n \times 0,4}{n} = 0,4 \\ V(F) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{0,24n}{n} \end{cases}$

$E(F) = 0,4$ → directement

$V(F) = \frac{0,6 \times 0,4}{n} = \frac{0,24}{n}$

Pour $n = 20$, on a $V(F) = 0,012$ et $20F \rightsquigarrow B(20; 0,4)$

$P(F \geq 0,5) = 1 - P(F \leq 0,5)$

$= 1 - P\left(\frac{X_n}{20} \leq 0,5\right)$

$= 1 - P(X_n \leq 10) = 1 - 0,8725 = 0,1275$

2- Pour $n = 150$ ; $X_{150} \rightsquigarrow B(150; 0,4)$

$E(X_{150}) = 60$

$V(X_{150}) = 0,6 \times 0,4 \times 150 = 36$

$\sigma(X_{150}) = 6$

Pour n assez grand ($n = 150$) on peut approximer $B(150; 0,4)$ par une loi normale $N(60; 6)$

$P(F \geq 0,5) = 1 - P(F \leq 0,5)$

$= 1 - P\left(\frac{X_n}{150} \leq 0,5\right)$

Soit $T = \frac{F - 60}{6} \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(F \geq 0,5) = 1 - P(\bar{X}_n < 75)$ ; on a $T = \frac{\bar{X}_n - 60}{6} \sim N(0$

$= 1 - P(T < \frac{15}{6} = 2,5)$

$= 1 - F_0(2,5)$

$= 1 - 0,9938 = 0,0062$

2ème méthode :

on a $F = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$ où $Z_i \in \{1, \dots, n\}$ suivent la loi de Bernoulli de même paramètre 0,4.

donc $Z_i$ étant défini par $Z_i = \begin{cases} 1 \text{ si la boule tirée blanche} \\ 0 \text{ si non (la boule tirée)} \end{cases}$

$Z_i$ sont des v.a indépendantes (tirage avec remise)

Donc théorème central limite (TCL : p28)

$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}$ suit de façon approchée la loi normale $N\left(0,4 ; \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{n}}\right)$

c-à-d $N(0,4 ; 0,04)$

$P(F_{150} > 0,5) = 1 - P(F_{150} < 0,5)$

on a $T = \frac{F_{150} - 0,4}{0,04} \rightsquigarrow N(0,1)$ donc $P($

$P(F_{150} < 0,5) = P(T < \frac{0,5 - 0,4}{0,04} = 2,5) = P(T < 2,5)$

$= 0,9938$

donc $P(F_{150} > 0,5) = 0,0062$

**EX6 :** on cherche $P(|F_1 - F_2| > 0,1)$

1- $F_1$ : la proportion de boules blanches

Soit $X_n$ une v.a qui décrit $F_1$.

$F_1 = \frac{X_n}{n} = \frac{X_{75}}{75}$ ; $E(F_1) = 0,4$

$V(F_1) = \frac{0,4 \times 0,6}{75} = 0,0032$

$F_i$ ($i \in \{1,2\}$) suit de façon approché la loi normale $(0,4 ; \sqrt{0,0032})$ ou $0,056$

$X_n$ suit la loi binomiale $B(75 ; 0,4)$

$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ ; $Z_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètres 0,4 $\rightarrow \begin{cases} Z_i = 1 \\ Z_i = 0 \end{cases}$

$F_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} = X$

**Loi de $F_1 - F_2$ :** $F_1 - F_2$ suit la loi normale $N(0 ; 0,08)$

$P(|F_1 - F_2| > 0,1) = 1 - P(|F_1 - F_2| < 0,1)$

on a $T = \frac{(F_1 - F_2) - 0}{0,08}$ suit la loi normale $N(0,1)$

$P(|F_1 - F_2| > 0,1) = 2(1 - P(T \leq 1,25))$

$= 2(1 - F_0(1,25))$

$= 0,1056 \times 2 = 0,2112$ " $0,8944$

$P(|T| > a) = 2(1 - F_0(a))$

2- On cherche n tq $P(|F_1 - F_2| > 0,1) < 0,1$

**Loi de $F_1 - F_2$ :**

$F_1 - F_2$ suit la loi normale $N(0, \sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{n} \times 2})$

$P(|F_1 - F_2| > 0,1) < 0,1$

$\Rightarrow 1 - P(T > 0,14\sqrt{n}) < 0,1$

$\Rightarrow$

$$P(|\bar{T}_1 - \bar{T}_2| > 0,1) = P(|T| > 0,14\sqrt{n}) = 2\left(1 - F_0(0,14\sqrt{n})\right) < 0,1$$

$$1 - F_0(0,14\sqrt{n}) < 0,05 \Rightarrow F_0(0,14\sqrt{n}) > 0,95$$

$$0,14\sqrt{n} > F_0^{-1}(0,95) = 1,645$$

$$\sqrt{n} > \frac{1,645}{0,14}$$

$$n \geq \left(\frac{1,645}{0,14}\right)^2$$

$$n = 138$$

## Ex 7 :

1- $E(U) = 0$

$V(U) = n$

$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - m)^2}{\sigma^2}$ ; soit $T_i = \frac{X_i - m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$

$\Rightarrow V = \sum_{i=1}^{n} T_i^2 \rightsquigarrow$ KRi-deux $\chi^2_n$

$\Rightarrow E(V) = n$, $V(V) = 2n$

$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow$ KRi-deux de degré de liberté $n-1 \Rightarrow \chi^2_{n-1}$

$E(W) = n-1$ ; $V(W) = 2(n-1)$

2- $U = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, \sqrt{n})$

$V \rightsquigarrow \chi^2_n$ (loi de KRi-deux)

$W \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

## Exercice 9 :

pour $f$ soit une densité de Probabilité $f \geq 0 \Rightarrow k > 0$ et fonction continue p.p

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_0^a k(t)\,dt = 1 \Rightarrow k\frac{a^2}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{a^2}$

$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^a \frac{2t^2}{a^2}\,dt = \frac{2}{3}a$

$V(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt - [E(T)]^2 = \int_0^a \frac{2t^2}{a^2}\,dt - \frac{4}{9}a^2 = \frac{a^2}{18}$

$F(t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{2t}{a^2}\,dt = \frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{si } x \in [0,a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

$\alpha = M_1 = \max(T_1, T_2, \dots, T_n)$

Soit G fonction de repartition de $M_n$ : $G(x) = P(M_n < x)$

$= P(\max(T_1, T_2, \dots, T_n) < x)$

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_i < x\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(T_i < x)$

$= \prod_{i=1}^{n} F(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}$

$G(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}$

$\Rightarrow G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} & \text{si } x \in [0,a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$

- La fct de repartition de $M_n$ est : $g(x) = G'(x)$

$= \frac{2n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n-1}$

$E(M_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} dx$

$= \int_0^a \frac{2n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n} dx = \frac{2n}{2n+1} \frac{1}{a^{2n}} a^{2n+1} = \frac{2n\,a}{2n+1}$

$V(M_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,dx - \left[E(M_n)\right]^2 = \int_0^a \frac{2n}{a^{2n}} x^{2n+1} dx - \left(\frac{2n\,a}{2n+1}\right)^2$

$= \frac{2n}{a^{2n}} \frac{a^{2n+2}}{2n+2} - \frac{4n^2 a^2}{(2n+1)^2} = \frac{2n\,a^2}{2n+2} - \frac{4n^2 a^2}{(2n+1)^2}$

$\lim_{n\to+\infty} E(M_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2na}{2n+1} = a$

$\lim_{n\to+\infty} V(M_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2na^2}{2(n+1)} - \frac{4n^2a^2}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} a^2\left(\frac{2n}{2n+2} - \frac{4n^2}{(2n+1)^2}\right)$

$= a^2 - a^2 = 0$

-3- Comme $\lim_{n\to+\infty} E(M_n) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} V(M_n) = 0$

$\Rightarrow M_n \xrightarrow{cmq} a$

moyen quadratique

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{2t}{a^2}\,dt \neq \frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

## Exercice 1:

-1- on cherche le nombre maximum de conteneurs qu'une benne pourra relever au cours d'une benne sans excéder sa capacité maximale.

. X: le poids des ordures d'un conteneurs

$E(X) = 50$

$\sigma(X) = 30$

on cherche n tq $P(S_n < 5500) = 0,95$ avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$X_i$ sont IID

d'où TCL

$S_n$ sera approximer à la loi normale $N(50n, \sqrt{n}50)$

on a $T = \frac{S_n - 50n}{\sqrt{n}\,30} \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(S_n < 5500) = P\left(T < \frac{5500 - 50n}{\sqrt{n}\,30}\right) = 0,95$

$\Rightarrow \frac{5500 - 50n}{\sqrt{n}\,30} = F_n^{-1}(0,95) = 1,6449$

$\Rightarrow 5500 - 50n = \sqrt{n} \times 30 \times 1,6449$

$\Rightarrow 49{,}345\sqrt{n} + 50n - 5500 = 0$

soit $x = \sqrt{n} \rightarrow x^2 = n$

$50x^2 + 49{,}345x - 5500 = 0$

$\sqrt{\Delta} = (49{,}345)^2 + 4 \times 50 \times 5500$

$\Rightarrow \underline{n = 100}$

100 conteneurs

- 2 - Cherchons n tq $P(S_n < 6000) = 0{,}95$

d'où TCL:

$$P(S_n < 6000) = P\left(T < \frac{6000 - 50n}{\sqrt{n}\,30}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6000 - 50n}{\sqrt{n}\,30} = 1{,}6449$$

$\Rightarrow 49{,}347\sqrt{n} + 50n - 6000 = 0$

on résolt cette equation de second degrée on obtient $n = 110$

Exercice 1e: